ΜΑΘΗΜΑ: ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΧΑΟΥΣ

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΚΟΝΤΑΡΗΣ

Α.Ε.Μ: 12507

ΘΕΜΑ:
Δοσμένης της εξίσωσης :

$$\mathbf{x_{n+1}=\mu x_n-\mu x_n^2}$$

Να «παίξουμε» με τις διαφορετικές τιμές του μ

μ=0.7, 0.8, 0.9,
μ=1
μ=1.2, 1.8, 2.0, 2.3
μ=2.3, 2.5, 2.7, 2.9, 3.0
μ=3.2, 3.4, 3.6, 3.7, 3.8,
3.9, 3.99, 4

1) Να διερευνηθεί η συμπεριφορά των λύσεων /σεναρίων για τις 20 τιμές του μ
2) Να εντοπιστούν οι τιμές του μ (κρίσιμες τιμές) που «αλλάζει» το σενάριο
3) Να διερευνηθεί τι συμβαίνει «κοντά» στις κρίσιμες τιμές $\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_1+\varepsilon$, $\mu_1-\varepsilon$, $\mu_2+\varepsilon$, $\mu_2-\varepsilon$,...
4) Να επαληθευτεί αναλυτικά η λύση U.V.N για μ=4
5) Ελέγξτε (εμπειρικά) ποια μέθοδος υπολογισμού των όρων (επαναληπτικός τύπος-τύπος U.V.N) είναι η καλύτερη.
6) Σχολιάστε τα αποτελέσματα.

<u>Εισαγωγή:</u>

Κάποιοι συχνά κοιτάζουν προς τα φυσικά συστήματα για να βρουν το χάος, αλλά εκτίθενται επίσης στη βιολογία. Οι βιολόγοι μελετούσαν τη μεταβλητότητα στους πληθυσμούς των διάφορων ειδών και βρήκαν μια εξίσωση που πρόβλεψε τους ζωικούς πληθυσμούς αρκετά καλά. Αυτή η εξίσωση ήταν μια απλή τετραγωνική εξίσωση αποκαλούμενη λογιστική εξίσωση διαφορών. Επιφανειακά, κάνείς δεν θα περίμενε αυτή η εξίσωση να παρέχει τη φανταστικά σύνθετη και χαοτική συμπεριφορά που εκθέτει.

Εν ολίγοις, το λογιστικό μοντέλο μελετά τους πληθυσμούς και τη βιωσιμότητα τους.

Όταν οι συντελεστές γεννήσεων και θανάτων είναι γραμμικοί ως προς τον πληθυσμό N_n, δηλαδή είναι

$$b = b_0 - b_1 N_n,\ b,\ b_0,\ b_1 \quad \text{θετικές σταθερές,}$$
$$d = d_0 + d_1 N_n,\ d,\ d_0,\ d_1 \ \text{θετικές σταθερές}$$

αντίστοιχα, τότε έχουμε την εξίσωση διαφορών του πληθυσμού

$$N_{n+1} = N_n + (b_0 - b_1 N_n)N_n - (d_0 + d_1 N_n)N_n.$$

Αυτή γράφεται

$$N_{n+1} = N_n[(1 + b_0 - d_0) - (b_1 + d_1)\, N_n] = N_n[\mu - \alpha N_n]$$

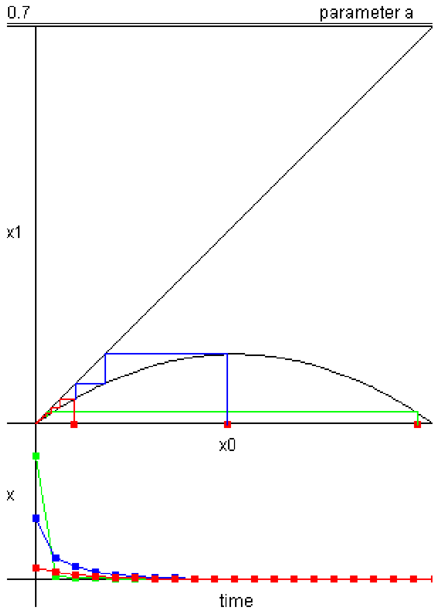
όπου $\mu = 1+ b_0 - d_0$, $\alpha = b_1 + d_1$, και αν θέσουμε $x_n = (b_1 + d_1)/(1 + b_0 - d_0)$, και $N_n = \alpha N_n/\mu$, $\mu>0$ τότε προκύπτει η λογιστική εξίσωση

$$\mathbf{x_{n+1} = \mu x_n(1- x_n)}$$

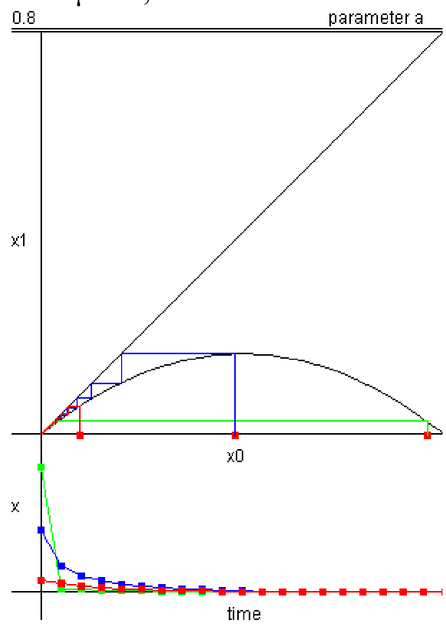
Κατ' αρχήν, επειδή πρέπει να είναι $x_n \geq 0$ συνεπάγεται ότι $0 \leq x_n \leq 1$
Άρα η συνάρτηση ορίζεται και παίρνει τιμές στο διάστημα [0,1], όταν είναι $0 \leq x_n \leq 1$ $0<\mu<4$. Αυτές οι προϋποθέσεις πρέπει να ισχύουν για να επιβιώνει ο πληθυσμός, αλλά αυτό θα το δούμε και παρακάτω.

Για τις συγκεκριμένες τιμές του μ που δίνονται στο ερώτημα 1, τα διαγράμματα είναι τα εξής:

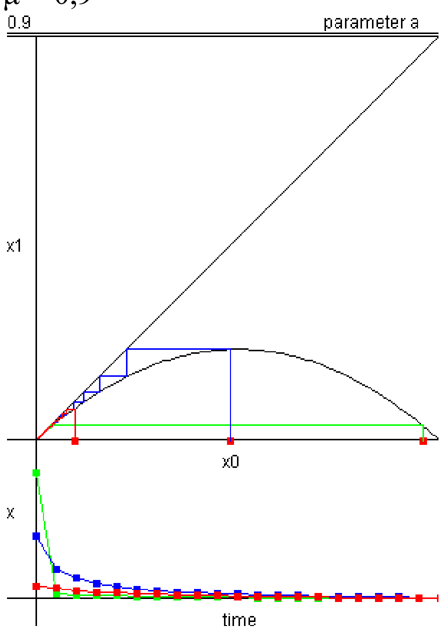
(Έχω παραθέσει τρεις τιμές του x οι οποίες φαίνονται με διαφορετικά χρώματα) μ = 0,7



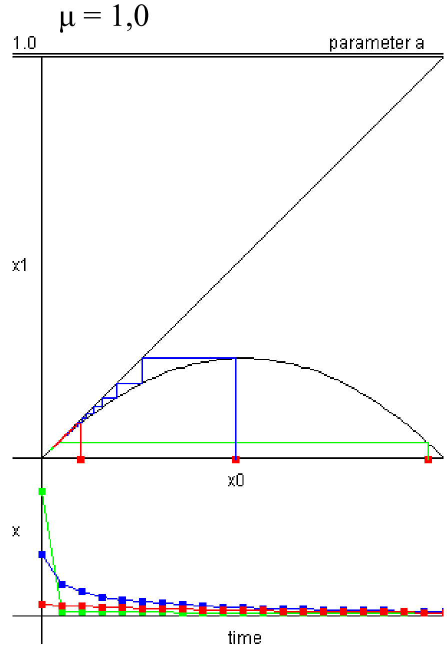
μ = 0,8



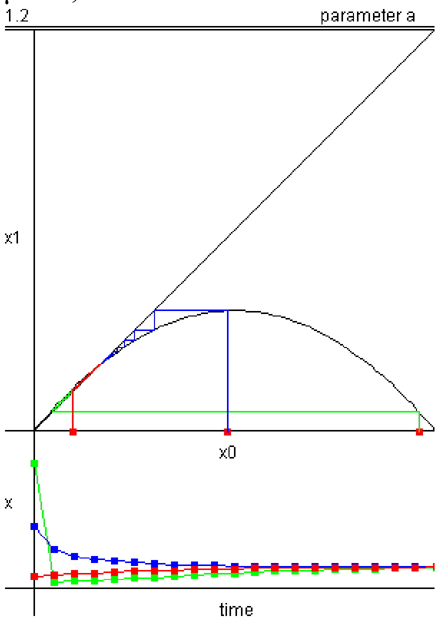
μ = 0,9



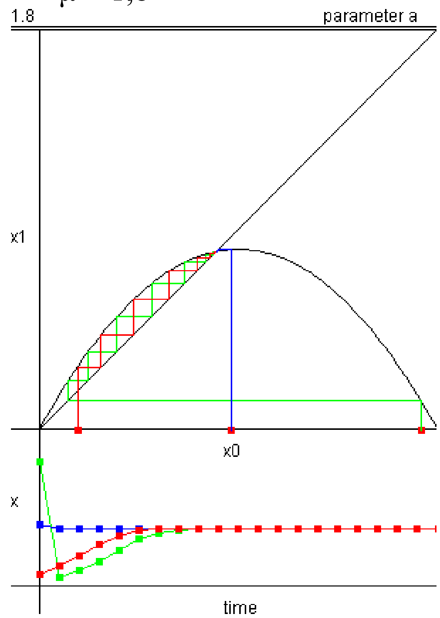
μ = 1,0



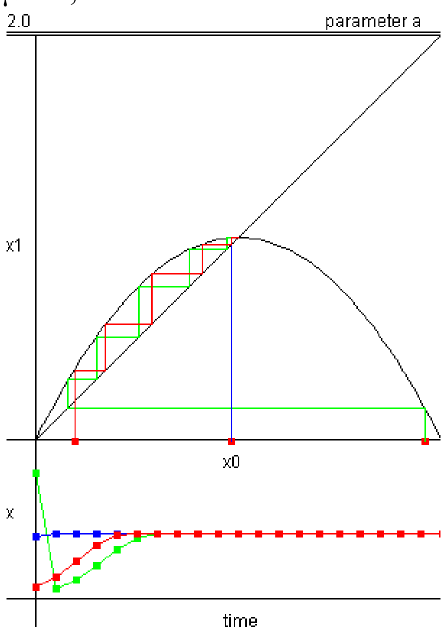
$\mu = 1{,}2$



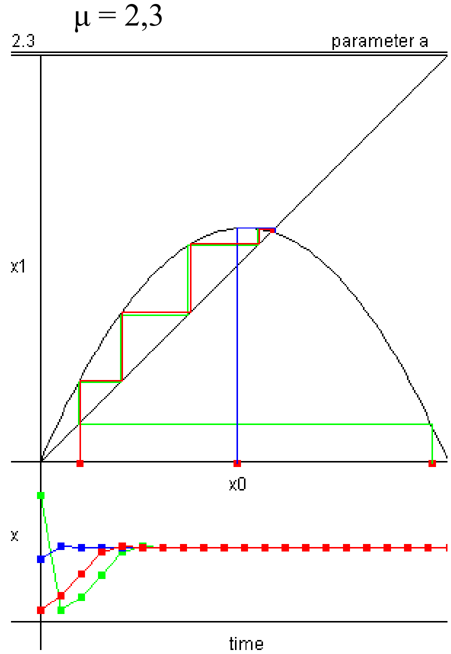
$\mu = 1{,}8$



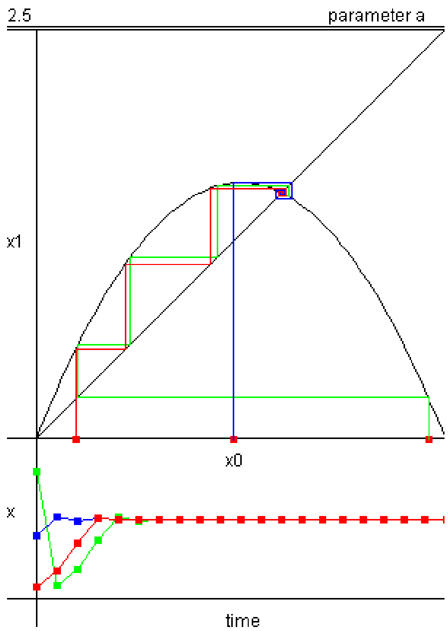
$\mu = 2{,}0$



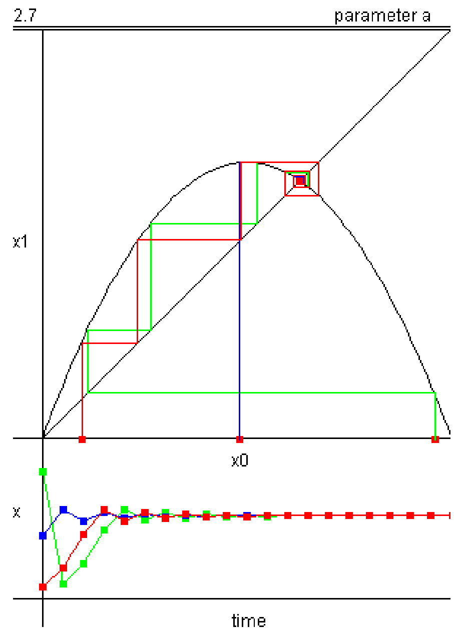
$\mu = 2{,}3$



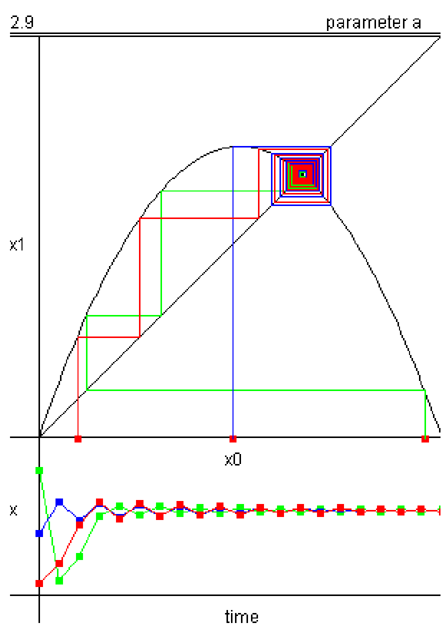
μ = 2,5



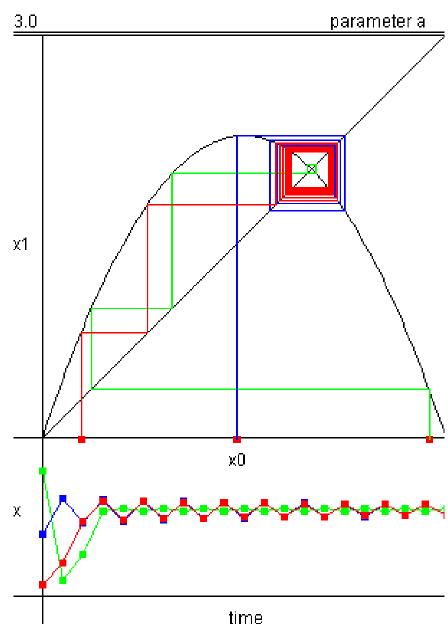
μ = 2,7



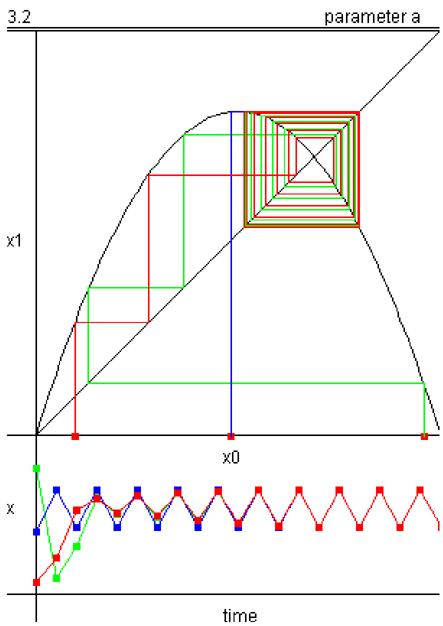
μ = 2,9



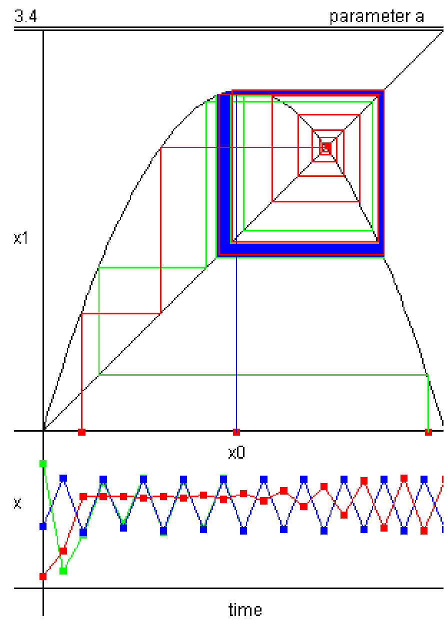
μ = 3,0



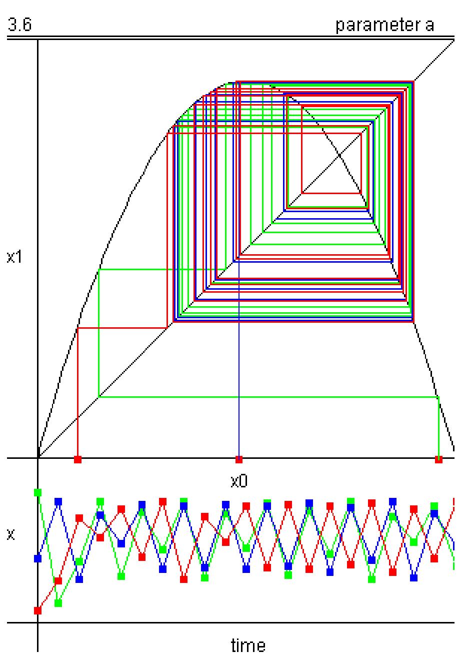
$\mu = 3{,}2$



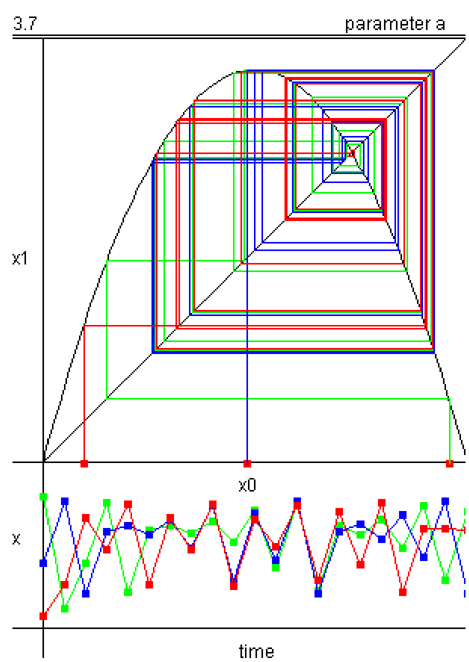
$\mu = 3{,}4$



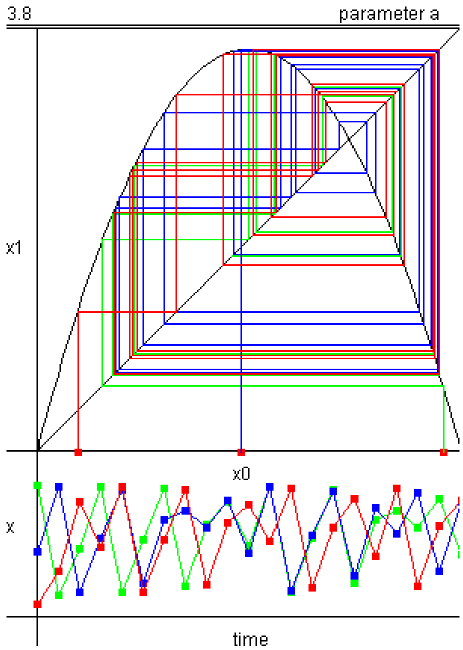
$\mu = 3{,}6$



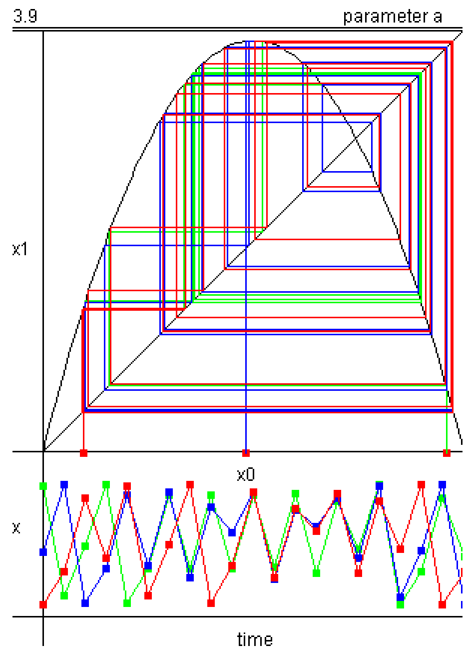
$\mu = 3{,}7$



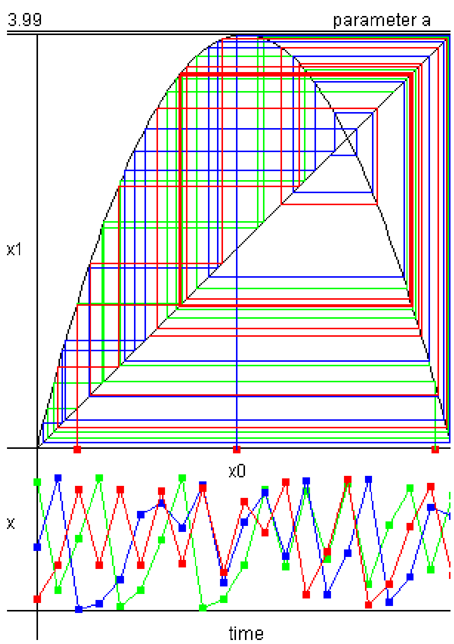
$\mu = 3{,}8$



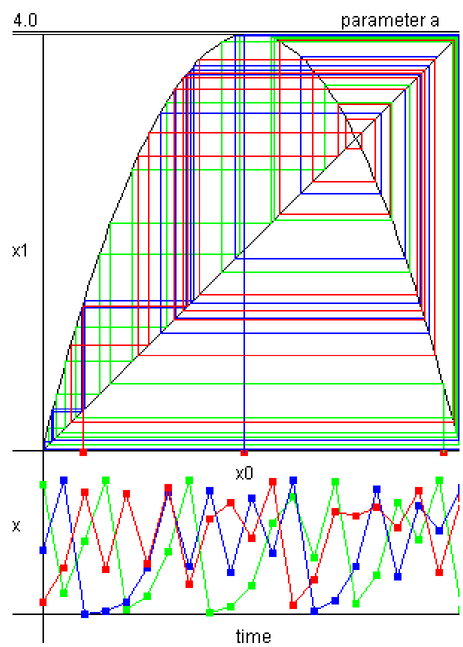
$\mu = 3{,}9$



$\mu = 3{,}99$



$\mu = 4{,}0$



Τι γίνεται με τις **κρίσιμες τιμές** του μ ;

Δίνοντας τιμές στη παράμετρο μ, η ακόλουθη συμπεριφορά παρατηρείται:

Για **0 < μ < 1** (*Αφανισμός*)

Με *το μ* μεταξύ 0 και 1, ο πληθυσμός θα πεθάνει τελικά, ανεξάρτητα από τον αρχικό πληθυσμό.

Για **1 < μ < 3** (*Σταθερό σημείο*)

Με *το μ* μεταξύ 1 και 2, ο πληθυσμός θα σταθεροποιηθεί γρήγορα στην αξία (μ – 1)/μ, ανεξάρτητα από τον αρχικό πληθυσμό.

Με *το μ* μεταξύ 2 και 3, ο πληθυσμός επίσης θα σταθεροποιηθεί στην ίδια αξία (το μ – 1)/μ, αλλά αρχικά ταλαντεύεται γύρω από εκείνη την αξία για κάποιο χρόνο. Ο ρυθμός σύγκλισης, είναι γραμμικός, εκτός από μ = 3, όταν ο ρυθμός είναι αργός.

Για **3 < μ < 4** (*Περιοδικότητα*)

Με *το μ* μεταξύ 3 και 1+sqr (6) (περίπου 3.44948), ο πληθυσμός θα ταλαντευτεί μεταξύ δύο τιμών για πάντα. Αυτές οι δύο τιμές εξαρτώνται από *το μ* αλλά είναι ανεξάρτητες του αρχικού πληθυσμού. Με *το μ* μεταξύ 3.44948 και 3,54 (περίπου), ο πληθυσμός θα ταλαντευτεί μεταξύ τεσσάρων τιμών για πάντα, Και πάλι, αυτή η συμπεριφορά δεν εξαρτάται από τον αρχικό πληθυσμό. Με *το μ* ελαφρώς μεγαλύτερο από 3,54, ο πληθυσμός θα ταλαντευτεί μεταξύ των 8 τιμών, έπειτα 16 ..32, κ.λπ.... Τα μήκη των διαστημάτων παραμέτρου που παράγουν τον ίδιο αριθμό ταλαντώσεων μειώνονται γρήγορα. Όλες αυτές οι συμπεριφορές δεν εξαρτώνται από τον αρχικό πληθυσμό.
(Όταν 3 < μ < 3,57 εμφανίζονται περιοδικές λύσεις, περιόδων 2^n, n = 1,2,...)

μ = 3,57 (περίπου) είναι η αρχή του χάους (**κρίσιμο σημείο**). Δεν μπορούμε πλέον να δούμε οποιεσδήποτε ταλαντώσεις. Οι μικρές παραλλαγές στον αρχικό πληθυσμό παράγουν εντυπωσιακά διαφορετικά αποτελέσματα κατά τη διάρκεια του χρόνου, ένα πρωταρχικό χαρακτηριστικό του χάους.
(Όταν 3,57 ≤ μ ≤ 3,67 εμφανίζονται σημεία συσσώρευσης κύκλων περιόδου 2^n)

Οι περισσότερες τιμές πέρα από 3,57 εκθέτουν τη χαοτική συμπεριφορά, αλλά υπάρχουν ακόμα ορισμένες απομονωμένες τιμές *του μ* που εμφανίζονται να παρουσιάζουν μη-χαοτική συμπεριφορά. Παραδείγματος χάριν, περίπου 3,828 (**κρίσιμο σημείο**) υπάρχει μια σειρά των παραμέτρων μ που παρουσιάζουν στην ταλάντωση μεταξύ τριών τιμών, και για τις ελαφρώς υψηλότερες τιμές της ταλάντωσης μ μεταξύ 6 τιμών, έπειτα 12 κ.λπ.... Υπάρχουν άλλες σειρές που παράγουν την ταλάντωση μεταξύ 5 τιμών κ.λπ. όλες οι περίοδοι ταλάντωσης εμφανίζονται. Αυτές οι συμπεριφορές είναι πάλι ανεξάρτητες από την αρχική αξία. (Όταν $3{,}67 \leq \mu \leq 3{,}828$ εμφανίζονται k-περιοδικές λύσεις, $k > 3$ περιττός αριθμός.)

Για **μ = 4** (*Χάος*)

Πέρα από $\mu = 4$, οι τιμές αφήνουν τελικά το διάστημα [0.1] και αποκλίνουν για σχεδόν όλες τις αρχικές τιμές.

Τώρα έστω ότι μ = 4. Βάζω μια τυχαία τιμή για το x = 0,2 (παίρνει τιμές από το 0 έως 1) Θα υπολογίσω δέκα τιμές του x_n, n = 0,2,3,…,9

x_0 = 0.2
x_1 = 0.6400000000000001
x_2 = 0.9215999999999999
x_3 = 0.28901376000000045
x_4 = 0.8219392261226504
x_5 = 0.585420538734196
x_6 = 0.970813326249439
x_7 = 0.11333924730375745
x_8 = 0.40197384929750063
x_9 = 0.9615634951138035

Ο παραπάνω υπολογισμός έγινε υπολογίζοντας κανονικά τον αναδρομικό τύπο (Do Loop) σε java :

```
//programa ypologismou 10 oron tis akolouthias me proto oro ton 0,2.

class akolouthia{
   public static void main(String args[]){
      log_synartisi(10);
   }
   static double log_synartisi(int x){
      if (x==0){
         return 0.2;
      }
      else{
         double proigoumenos=log_synartisi(x-1);
         System.out.println(proigoumenos  );
         return 4*proigoumenos*(1-proigoumenos);
      }
      }
```

}

Υπάρχει, κι άλλος τρόπος υπολογισμού της ακολουθίας, μέσω του τύπου του Ulam Von Noyman :

$$\mathbf{x_\nu = sin^2(2^\nu arcsin[sqr(x_0)])}$$

όπου ν = 0,1,...,9 σύμφωνα με τον οποίο θα πρέπει κανονικά να βρούμε τα ίδια αποτελέσματα για τις ίδιες τιμές που θα δώσουμε στο x_ν ν = 0,2,...,9

πάλι μέσω της γλώσσας προγραμματισμού java βρίσκω:

$x_0 = 0.2$
$x_1 = 0.6399999999999999$
$x_2 = 0.9216000000000002$
$x_3 = 0.2890137599999999$
$x_4 = 0.8219392261226494$
$x_5 = 0.5854205387341986$
$x_6 = 0.9708133262494371$
$x_7 = 0.11333924730376455$
$x_8 = 0.40197384929752267$
$x_9 = 0.9615634951138208$

Ο υπολογισμός έγινε και πάλι με την ίδια διαδικασία do loop μέσω της java:

```
// programma to opoio ypologizei tin eksisosi me 1<=n<=10

class ypologismos_eksisosis{
   public static void main(String args[]){
      for(int i=1;i<=10;i++){
         System.out.println(t(i));
      }
   }
   static double t(int i){
      return

(Math.sin(Math.pow(2,i)*Math.asin(Math.sqrt(0.2)))-
1)*(Math.sin(Math.pow(2,i)*Math.asin(Math.sqrt(0.2)))+1)+1;
   }
}
```

Παρατηρώ ότι τα αποτελέσματα δεν έχουν μεγάλες αποκλίσεις μεταξύ τους που αποδεικνύει πως η μέθοδος U.V.N είναι αποτελεσματική με αρκετά μεγάλη ακρίβεια.

Σε ότι αφορά το ποια από τις δυο μεθόδους είναι οι καλύτερη, η επαναληπτική μέθοδος είναι απλούστερη για μικρά ν σε περίπτωση υπολογισμού στο χέρι, ενώ η μέθοδος U.V.N είναι πιο άμεση και πιο αποτελεσματική για μεγαλύτερα ν, εφόσον καταλαμβάνει μικρότερη υπολογιστική ισχύ και κατά συνέπεια υπολογίζεται από ασθενέστερα υπολογιστικά συστήματα σε λιγότερο χρόνο.

Τελικά...

Η χαοτική κατάσταση μιας εξίσωσης διαφορών έχει καμιά αντιστοιχία στη βιολογία; Η πλειονότητα των βιολόγων θεωρεί πως τα βιολογικά συστήματα (ανάπτυξη πληθυσμών) εξελίσσονται μέσα στα όρια της ευστάθειας των περιοδικών λύσεων μικρής τάξης (όχι βέβαια τρίτης τάξης). Έτσι, η χαοτική κατάσταση παραμένει κυρίως ένα μαθηματικό περίεργο.