

**ΕΡΓΑΣΙΑ ΓΙΑ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΤΗΣ**  
**ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΤΩΝ**  
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**

**ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΚΟΝΤΑΡΗΣ**

**Δ' ΕΞΑΜΗΝΟ ΣΠΟΥΔΩΝ**

---

**2003-2004**

**Η ΑΝΑΖΗΤΗΣΗ ΤΗΣ ΣΩΣΤΗΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΤΩΝ  
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ Η ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΤΗΣ ΚΑΤΑ ΤΗ ΠΑΡΟΔΟ  
ΤΩΝ ΧΡΟΝΩΝ ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ  
ΦΙΛΟΣΟΦΙΩΝ.**

<u>ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ</u>	<u>ΣΕΛ</u>
ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	3
Η «ΕΡΕΥΝΑ ΣΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ.....	5
Η ΕΡΕΥΝΑ ΚΑΙ Η ΚΟΥΛΤΟΥΡΑ.....	8
ΜΙΑ ΘΕΣΗ ΣΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ.....	9
Η ΕΡΕΥΝΑ ΤΗΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΟ ΓΥΝΑΙΚΕΙΟ ΦΥΛΛΟ.....	10
ΨΥΧΟΛΟΓΙΚΕΣ ΠΡΟΕΚΤΑΣΕΙΣ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ.....	11
Η ΕΡΕΥΝΑ ΣΕ Ο,ΤΙ ΑΦΟΡΑ ΤΗΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΚΑΙ ΤΟΥ ΤΡΟΠΟΥ ΔΙΔΑΧΗΣ ΤΗΣ.....	12
ΕΠΙΛΟΓΟΣ.....	15

## Η ΑΝΑΖΗΤΗΣΗ ΤΗΣ ΣΩΣΤΗΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ Η ΔΙΑΜΟΡΦΩΣΗ ΤΗΣ ΚΑΤΑ ΤΗ ΠΑΡΟΔΟ ΤΩΝ ΧΡΟΝΩΝ ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΩΝ ΦΙΛΟΣΟΦΙΩΝ.

### ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Γιατί διδασκόμαστε μαθηματικά; Μια συνήθης ερώτηση με όχι απλή απάντηση η οποία τίθεται από τους μαθητές και όχι μόνο. Στη παραπάνω ερώτηση υπάρχουν μερικές τετριμμένες απαντήσεις του τύπου «Επειδή είναι ωφέλιμα» ή «Επειδή πρέπει να εφαρμόσουμε την επιστήμη, στη βιομηχανία, στη κυβερνητική και σε όλους τους τομείς της ανθρώπινης δραστηριότητας». Αυτές οι απαντήσεις, βέβαια, αν τις καλοεξετάσουμε, θα δούμε ότι δεν πολυστέκουν. Τα μαθηματικά από την άποψη της καθημερινής ζωής, δεν είναι τόσο χρήσιμα αφού μόνο ένα πολύ μικρό τμήμα τους χρησιμοποιείται από τη συντριπτική πλειοψηφία των ατόμων. Για παράδειγμα, όλες οι αριθμητικές πράξεις γίνονται με το κομπιουτεράκι και εκτός αυτού, ποιος καθημερινός άνθρωπος θα χρειαστεί να υπολογίσει παραγώγους και ολοκληρώματα! Ένα πολύ μικρό μέρος του πληθυσμού επίσης, πρόκειται να χρειαστεί τα μαθηματικά για τη μάθηση της φυσικής, της χημείας, της ηλεκτρονικής και των άλλων κλάδων της τεχνολογίας. Τότε, γιατί άραγε θα πρέπει να μαθαίνουμε μαθηματικά; Γιατί θα πρέπει το 95% του πληθυσμού, να πρέπει να διδαχθεί και αυτό μαθηματικά προς χάριν του υπολοίπου 5%; Στο κάτω κάτω, μπορεί να ισχυριστεί κανείς πως είναι δυνατό να βρεθούν πιο αποτελεσματικοί τρόποι να επιλέξουμε αυτό το 5% και να τους διδάξουμε τα μαθηματικά εκείνα, τα οποία θα τους χρησιμεύσουν για τις ανάγκες της βιομηχανίας, της τεχνολογίας ή του εμπορίου.

Οι παραπάνω αντιρρήσεις για την αναγκαιότητα της διδασκαλίας των μαθηματικών σε ολόκληρο το μαθητικό πληθυσμό, είναι συνηθισμένες και ακούγονται πολύ συχνά, κυρίως από εκείνους οι οποίοι στη βασική τους εκπαίδευση αναγκάστηκαν να παρακολουθήσουν απαιτητικά μαθηματικά προγράμματα, ενώ στην επαγγελματική τους ζωή δε χρειάστηκαν τίποτα περισσότερο από τις τέσσερις πράξεις. Βέβαια, υπάρχει και η άλλη η άποψη, ότι δηλαδή τα μαθηματικά εκπαιδεύουν και βελτιώνουν τη διανοητική ικανότητα του ανθρώπου<sup>1</sup>. Είναι αλήθεια πως η μάθηση των μαθηματικών βελτιώνει τη

---

<sup>1</sup> Μπάμπης Τουμάσης: «Σύγχρονη διδακτική των μαθηματικών». Σελ 60-61

μνήμη και οξύνει τη παρατηρητικότητα του ανθρώπου. Εάν όμως η γνώση των μαθηματικών γενικά ή η καλλιέργεια της μνήμης δεν είναι ο βασικός σκοπός της διδασκαλίας τότε ποιος είναι;

Υπάρχουν κάποιες πλευρές των μαθηματικών, η μάθηση των οποίων μπορεί να ενθαρρύνει την ανάπτυξη ορισμένων στάσεων, δεξιοτήτων και προτύπων της σκέψης απαραίτητων για τις ανάγκες της σύγχρονης ζωής. Τα μαθηματικά, μέσα από μια κατάλληλη διδασκαλία, είναι σε θέση να αναπτύξουν δεξιότητες, τεχνικές και στρατηγικές οι οποίες είναι απαραίτητες για την αντιμετώπιση από τον άνθρωπο κάποιων πρωτόγνωρων προβληματικών καταστάσεων<sup>1</sup>. Έχει λοιπόν σημασία να διακρίνουμε και να εντοπίσουμε την αξία και τη καθημερινή και όχι μόνο χρησιμότητα των μαθηματικών με τρόπο ώστε να δικαιολογείται η διδασκαλία τους στα σχολεία. Για την απάντηση των παραπάνω ερωτημάτων θα κάνουμε αναδρομή στο παρελθόν ώστε να παρατηρήσουμε τον ρόλο της έρευνας για τη διδακτική των μαθηματικών και πού πρέπει αυτή να στοχεύει, καθώς επίσης και τις διάφορες ψυχολογικές προεκτάσεις αλλά και τον τρόπο με τον οποίο θα πρέπει να διδάσκονται τα μαθηματικά ώστε να γίνονται κατανοητά από τους μαθητές. Επιπλέον, η μελέτη αυτή, θα αναδείξει την αναγκαιότητα της έρευνας για τη διδακτική που επέβαλε την είσοδο των μαθηματικών ως αντικείμενο υποχρεωτικής διδασκαλίας και πως αυτή η αναγκαιότητα, όχι μονάχα παραμένει αναλλοίωτη με τα χρόνια αλλά αυξάνεται και ανανεώνεται συνεχώς ανάλογα με τη γνώση η οποία αυξάνει με γεωμετρική πρόοδο.

Από την άλλη, τι είναι διδακτική των μαθηματικών; Η έννοια της λέξης «διδακτική είναι αμφίβολη, ρευστή. Οι τεχνικοί της εκπαίδευσης, οι παιδαγωγοί, και οι δάσκαλοι έχουν παίξει με τις λέξεις προσπαθώντας να δώσουν ορισμούς που ποικίλλουν από τους πιο απλούς (Διδακτική είναι η τέχνη της διδασκαλίας, Διδακτική είναι μια συλλογή ασκήσεων κ.τ.λ) έως αυτούς που αναλύουν πορείες ψυχολογικού, κοινωνιολογικού, παιδαγωγικού ή επιστημονικού τύπου. Πολλοί από αυτούς είναι παντελώς ανεπαρκείς στις μέρες μας. Εξάλλου πολλοί ορισμοί δεν παίρνουν καθόλου υπ' όψιν τους το μαθητή, δηλαδή το κύριο αντικείμενο της διδακτικής. Ο ορισμός, όμως, δεν είναι το ζητούμενο. Οι δύο κυριότερες αιτίες ανάπτυξης της έρευνας στη διδακτική των μαθηματικών είναι η σπουδαιότητα των προβλημάτων της διδασκαλίας του μαθήματος των μαθηματικών την οποία όλοι αναγνωρίζουν αλλά και ο κοινωνικός ρόλος των προβλημάτων αυτών. Η συγκεκριμένη έρευνα στοχεύει στη μελέτη της μετάδοσης και απόκτησης των μαθηματικών γνώσεων κατά το δυνατόν στο σχολικό χώρο, παίρνοντας, όμως υπ' όψιν τις αντιλήψεις των μαθητών οι οποίες σχηματίζονται και εκτός του σχολικού χώρου<sup>2</sup>.

Το θέμα της διδακτικής των μαθηματικών έχει παγκόσμιες διαστάσεις καθώς συζητείται εντόνως στα διάφορα συνέδρια που γίνονται με γνώμονα τη καλύτερευση του τρόπου διδασκαλίας. Οι διάφοροι «πειραματισμοί» γίνονται κατ' αρχάς σε ορισμένα σχολεία τα επονομαζόμενα «πειραματικά» κάτω ,φυσικά, από τη καθοδήγηση του μαθηματικού τμήματος του εθνικού παιδαγωγικού ινστιτούτου.<sup>3</sup>

Κατά κύριο λόγο, ας δούμε τους λόγους για τους οποίους προκλήθηκε το παγκόσμιο ενδιαφέρον γύρω από τα μαθηματικά και τη διδακτική τους.

---

<sup>1</sup> Μπάμπης Τουμάσης : «Σύγχρονη διδακτική των μαθηματικών» σελ 60-61

<sup>2</sup> Αθανάσιος Γαγάτσης : «Θέματα διδακτικής των μαθηματικών» σελ 1-2

<sup>3</sup> New trends in mathematics teaching UNESCO σελ 10

Η παραδοσιακή κáθοδος διδασκαλίας των μαθηματικών ήταν αρκετά ικανοποιητική για τις μέρες της. Ανταποκρινόταν δηλαδή στους στόχους και τις απαιτήσεις και τελικά πετύχαινε σε κάποιο βαθμό το στόχο της. Η αλήθεια είναι πως η παλαιότερη περίοδος είχε εκπληκτικούς μαθηματικούς οι οποίοι δίδασκαν το αντικείμενο με εξαιρετικά αποτελέσματα.

Όμως, τα αντικείμενα ορισμένα για «μαζική» διδασκαλία, σιγά-σιγά έπαψαν να ικανοποιούν τις ολοένα και αυξανόμενες απαιτήσεις γιατί είχαν σα πρωταρχικό τους σκοπό τη διδασκαλία ορισμένων τυπικών μαθηματικών διαδικασιών σε μέτριους μαθητές. Αυτός ο πρωταρχικός τρόπος διδασκαλίας έπαψε να ικανοποιεί τις απαιτήσεις διότι τα μαθηματικά άρχιζαν σταδιακά και σταθερά να διεισδύουν σε σχεδόν όλες τις «σφαίρες» της ζωής. Σαν αποτέλεσμα των επιστημονικών ανακαλύψεων αλλά και της τεχνικής ανάπτυξης, χιλιάδες άνθρωποι χρησιμοποιούν αντικείμενα τα οποία παλιότερα ούτε καν υπήρχαν. Αυτές οι ανακαλύψεις, από μόνες τους απαιτούν ολοένα και περισσότερες μαθηματικές εφαρμογές. Ο άνθρωπος του σήμερα, επιβάλλεται να κατέχει μια σαφώς καλύτερη γνώση των μαθηματικών απ' ότι θα μπορούσε να έχει από τις παραδοσιακές μεθόδους διδασκαλίας. Ο τρόπος με τον οποίο διδάσκονταν τα μαθηματικά, απαντούσε στις χαμηλές απαιτήσεις του «χθες» ενώ αδυνατεί να ικανοποιήσει τις αυξημένες απαιτήσεις του «σήμερα» πόσο μάλλον τις υπερβολικές απαιτήσεις του «αύριο». Όταν λοιπόν τα σχολεία αρχίζουν να γίνονται ανεπαρκή για τη διδασκαλία του σταδιακά αυξανόμενου μαθηματικού υλικού, οι εκπαιδευτικοί πρέπει να διδάσκουν στους μαθητές τους το πώς θα διευρύνουν τις μαθηματικές τους γνώσεις αλλά και τον τρόπο με τον οποίο θα μπορέσουν ν' αποκτήσουν καινούριες βάση των όσων διδάχθηκαν από το σχολείο. Σήμερα, η διδακτική των μαθηματικών στοχεύει στο να κάνει έναν μαθητή ικανό ώστε να εφαρμόζει και να διερευνά τις γνώσεις του<sup>1</sup>.

## **Η «ΕΡΕΥΝΑ» ΣΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**

Η ιστορία της έρευνας για τη διδακτική των μαθηματικών, είναι αναπόσπαστο κομμάτι της ιστορίας του πεδίου της μαθηματικής εκπαίδευσης το οποίο έχει αναπτυχθεί αρκετά τους δυο τελευταίους αιώνες εφόσον τόσο οι μαθηματικοί (ειδικότερα) όσο και οι διδάσκαλοι (γενικότερα) έστρεψαν τη προσοχή τους στο πώς πρέπει να διδάσκονται και να μαθαίνονται τα μαθηματικά στα σχολεία. Επιπλέον, η έρευνα για τη διδακτική των μαθηματικών, επηρεάστηκε και διαμορφώθηκε μέσα σε μια ευρύτερη αρένα από δυνάμεις, οι οποίες περίπου έναν αιώνα πριν εγκατέλειψαν τη φιλοσοφική θεώρηση αναζητώντας μια πιο φιλοσοφική προσέγγιση. Αλλά, όπως και η ίδια η μαθηματική εκπαίδευση, η έρευνα στη διδακτική των μαθηματικών προσπαθεί να ανεξαρτητοποιηθεί ώστε να αποκτήσει τη δική της ταυτότητα. Προσπάθησε να βάλει σε καλούπι τα δικά της θέματα και προβλήματα και ταυτόχρονα να βρει δικούς της τρόπους αντιμετώπισής τους.

Κατά τη διάρκεια των δυο τελευταίων δεκαετιών, η «διαδικασία» αυτή του αυτοπροσδιορισμού, έχει κατά ένα μεγάλο μέρος της ολοκληρωθεί<sup>2</sup>. Μια διεθνής

---

<sup>1</sup> New trends in mathematics teaching UNESCO σελ. 10

<sup>2</sup> Handbook of research on mathematics teaching and learning, Jeremy Kilpatrick: "a history of research in mathematics education", Macmillan Publishing Company 1992 σελ.3

κοινότητα ερευνητών όχι μόνο υπάρχει αλλά και κάνει συναντήσεις, εκδίδει περιοδικά, προωθεί τη συνεργασία όλων σε ότι αφορά την πραγματοποίηση και κριτική των ερευνών που αφορούν τις σπουδές, και τέλος προσπαθεί να διατηρήσει «ζωντανή» την ερευνητική συνείδηση στα συμβούλια των οργανισμών που σχετίζονται με τη μαθηματική εκπαίδευση και στα οποία συμμετέχουν και μέλη της ερευνητικής κοινότητας.

Ας κοιτάξουμε, όμως, και λίγο στο παρελθόν ώστε να ανακαλύψουμε ή ακόμη και να θυμηθούμε τους ανθρώπους και τα γεγονότα τα οποία έδωσαν μορφή, κατεύθυνση και ουσία στο τομέα της έρευνας για τη διδακτική των μαθηματικών<sup>1</sup>.

Ο πρώτος άνθρωπος ο οποίος κατά κάποιο τρόπο έθιξε το ζήτημα της έρευνας για τη διδακτική των μαθηματικών, ήταν ο **Αριστοτέλης**. ο Αριστοτέλης πίστευε ότι η γενική εκπαίδευση των ελευθέρων πολιτών ήταν ουσιώδης για τη δημιουργία μιας συνεκτικής κοινότητας και ενός συγκροτημένου κράτους. Συμμερίζεται δηλαδή τις απόψεις του Πλάτωνα για την εκπαίδευση. Πίστευε επιπλέον πως τα μικρά παιδιά θα έπρεπε να αποκτήσουν ηθική και φυσική εκπαίδευση μέσω του παιχνιδιού μέχρι την ηλικία των δεκατεσσάρων ετών, οπότε θα είναι και περισσότερο έτοιμα για πιο απαιτητικές διανοητικές επιδιώξεις. Σε ότι αφορά τη διδακτική, στην άποψη αυτή του Αριστοτέλη βρίσκουμε τους πρώτους προβληματισμούς γύρω από τη κατάσταση «ετοιμότητας» για μάθηση, ένα πρόβλημα το οποίο απασχόλησε και απασχολεί αρκετά έντονα και στις μέρες μας τη γνωστική ψυχολογία και το οποίο προσπαθεί να διερευνήσει πότε και κάτω από ποιες συνθήκες είναι το παιδί έτοιμο για τις πιο αφηρημένες και πολύπλοκες διανοητικές λειτουργίες όπως αυτές που απαιτούνται για την ορθή κατανόηση και μάθηση των μαθηματικών<sup>2</sup>.

Πέρα από τον Αριστοτέλη, ο οποίος εισήγαγε την έννοια της έρευνας σαν ιδέα, η υλοποίησή της άργησε να πραγματοποιηθεί σε ικανοποιητικό βαθμό. Βεβαίως, υπάρχει και η δυσκολία ως προς το τι μπορεί και τι δε μπορεί να θεωρηθεί σαν «έρευνα» για τη διδακτική. Για παράδειγμα, ενέργειες όπως η συγγραφή ενός βιβλίου με μαθηματικό περιεχόμενο το οποίο οι περισσότεροι άνθρωποι στις μέρες μας δε το θεωρούν έρευνα, παλαιότερα ήταν το άλφα και το ωμέγα τις έρευνας στο τομέα της διδακτικής των μαθηματικών. Η αλήθεια, όμως, είναι πως παλαιότερα οι ερευνητές δεν χρησιμοποιούσαν απαραίτητως τον όρο «έρευνα για τη διδακτική των μαθηματικών» για να περιγράψουν αυτό το οποίο έκαναν.

Από την άλλη, ένας χρήσιμος ορισμός της έρευνας είναι η **«πειθαρχημένη αναζήτηση»**. Ο όρος «αναζήτηση» διαφοροποιείται ελαφρώς από τον όρο «έρευνα» στο γεγονός ότι υπονοεί πως η όλη εργασία στοχεύει στην απάντηση μιας συγκεκριμένης ερώτησης και πως δεν είναι απλώς μια θεωρητική αναζήτηση ή απλώς μια εκπόνηση εργασίας. Ο όρος «πειθαρχημένη» υποθέτει όχι μόνο πως η έρευνα θα καθοδηγείται από ιδέες και μεθόδους από διάφορους τομείς όπως η ψυχολογία, η ιστορία, η φιλοσοφία και η ανθρωπολογία αλλά και πως όλα τα προαναφερθέντα θα θέτονται στο προσκήνιο ώστε η διαδικασία της αναζήτησης να μπορεί να εξετάζεται και να πιστοποιείται<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> Handbook of research on mathematics teaching and learning, Jeremy Kilpatrick: “a history of research in mathematics education”, Macmillan Publishing Company 1992 σελ.3

<sup>2</sup> Μπάμπης Τουμάσης: «Σύγχρονη διδακτική των μαθηματικών».σελ 50-51

Η πειθαρχημένη αναζήτηση δεν είναι απαραίτητο να είναι «επιστημονική» υπό την έννοια του να είναι βασισμένη σε εμπειρικές υποθέσεις, αλλά όπως κάθε καλή επιστημονική εργασία θα πρέπει να είναι σχολαστική και ανοιχτή σε κριτική και πιθανή αμφισβήτηση. Δίνοντας έναν ορισμό βασισμένο στα παραπάνω, μπορούμε να πούμε πως έρευνα στη μαθηματική παιδεία είναι η πειθαρχημένη αναζήτηση στη διδασκαλία και εκμάθηση των μαθηματικών.

Οι σκοποί της ερευνητικής διαδικασίας στη διδακτική των μαθηματικών είναι ποικίλοι. Αν για παράδειγμα δούμε την έρευνα από τη σκοπιά των φυσικών επιστημών, ακολουθώντας δηλαδή μια εμπειρική-αναλυτική παράδοση, οι παραδοσιακοί **σκοποί της επιστήμης** είναι να εξηγεί, να προβλέπει και να ελέγχει. Αν κάποιος θεωρήσει την έρευνα της διδακτικής των μαθηματικών ως μέσω κατανόησης μιας κουλτούρας, τότε από αυτή τη σκοπιά θα κατανοήσει περισσότερο το νόημα που έχει η διδασκαλία και η εκμάθηση των μαθηματικών από τη πλευρά των ενδιαφερόμενων (καθηγητή-μαθητή) στη διαδικασία. Αν, όμως, κάποιος άλλος το δει από τη πλευρά της κριτικής κοινωνιολογίας, τότε κατανοεί πως η έρευνα όχι μόνο βοηθά το καθηγητή και το μαθητή σε ό,τι αφορά την απόκτηση μεγαλύτερης ελευθερίας και αυτονομίας στη συνεργασία τους, αλλά και στη βελτίωση της πρακτικής καθώς επίσης και στη συμμετοχή ακόμη περισσότερων σε αυτή τη βελτίωση.

Τη τελευταία δεκαετία, μια κίνηση στην έρευνα για τη διδακτική των μαθηματικών την έστρεψε μακριά από την εμπειρική-αναλυτική παράδοση, σε μια περισσότερο κριτική προσέγγιση. Αν και οι μέθοδοι της εμπειρικής-αναλυτικής παράδοσης κυριαρχούσαν στην έρευνα της διδακτικής των μαθηματικών, για περισσότερο από έναν αιώνα οι επιστημονικές εμπνεύσεις της τριάδας «εξήγηση», «πρόβλεψη» και «έλεγχος» μοιάζουν να μην είχαν ποτέ σαν κυριαρχικό στοιχείο το κίνητρο ως επιθυμία να κατανοήσουν και, ειδικότερα, να βελτιώσουν και την εκμάθηση αλλά και τη διδασκαλία των μαθηματικών. Η έρευνα στη μαθηματική παιδεία έχει να αντιμετωπίσει πρωταρχικά, προβλήματα μάθησης αλλά και διδασκαλίας όπως ορίζονται από τους ερευνητές. Αυτοί αναλαμβάνουν την εκπόνηση των ερευνητικών διαδικασιών, επειδή γνωρίζουν πως τα αποτελέσματα της έρευνάς τους, θα οδηγήσουν στη καλύτερευση της διδακτικής. Κάνουν δηλαδή την έρευνα συνειδητά και με όραμα.

Δυστυχώς, πέρα από τους αγαθούς σκοπούς των ερευνών υπάρχουν και άλλοι λόγοι για τους οποίους κάποιος αναλαμβάνει μια τέτοιου είδους εργασία. Υπουργεία παιδείας αναθέτουν σε επιτροπές ερευνών τέτοιες εργασίες μόνο και μόνο για να δικαιολογήσουν ορισμένες ήδη παρμένες αποφάσεις ή αποφάσεις οι οποίες πρόκειται να παρθούν και αλλιώς δε θα ήταν δικαιολογημένες. Επιπλέον, υπάρχουν και οι περιπτώσεις όπου κάποιοι ερευνητές αναλαμβάνουν μια αδιάφορη για αυτούς έρευνα λόγω χρημάτων ή λόγω υποσχέσεως προαγωγής. Όμως, με αυτό το τρόπο δε φτάνουμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα.

Τα διάφορα πολιτικά και προσωπικά κίνητρα που εισέρχονται στο μεγάλο σώμα της έρευνας της διδακτικής των μαθηματικών είναι πολύ δύσκολο να εντοπιστούν<sup>1</sup>. Παρόλα αυτά, όμως, όποια και να' ναι τα κίνητρα κάθε φορά, η ουσία είναι πως η κάθε έρευνα

---

<sup>1</sup> Handbook of research on mathematics teaching and learning, Jeremy Kilpatrick: "a history of research in mathematics education", Macmillan Publishing Company 1992 σελ.3

που πραγματοποιείται προσθέτει από κάθε μια το δικό της λιθαράκι στο οικοδόμημα της έρευνας για την ορθή διδακτική των μαθηματικών.

## **Η ΕΡΕΥΝΑ ΚΑΙ Η ΚΟΥΛΤΟΥΡΑ**

Οι διάφορες αυτές έρευνες στις οποίες αναφερθήκαμε προηγουμένως, δε γίνονται δίχως την επιρροή των διαφόρων σε κάθε εποχή παραδόσεων και κουλτούρας. Οι επιρροές αυτές προέρχονται ακόμη και από τις διαφορετικές φιλοσοφίες των χωρών στο θέμα της παιδείας. Σύμφωνα με τον Michael Sadler, για την έρευνα της διδακτικής, δε θα πρέπει να ξεχνάμε πως οι καταστάσεις έξω από το σχολικό περιβάλλον είναι πολύ πιο σημαντικές από αυτές μέσα στα σχολεία και κυριεύουν και εμπλέκονται σε αυτές που είναι μέσα. Ένα εθνικό σύστημα παιδείας έχει μέσα του κάποια από τις μυστικές διεργασίες της εθνικής ζωής. Αντανακλά, ενώ ταυτόχρονα (σύμφωνα πάντα με τον Sadler) προσπαθεί να διορθώσει τις αποτυχίες του εθνικού χαρακτήρα. Ακόμη, ενστικτωδώς, μερικές φορές δίδει περισσότερη βαρύτητα και έμφαση στα μέρη της εκπαίδευσης τα οποία ο εθνικός χαρακτήρας χρειάζεται περισσότερο.

Η εμπειρική έρευνα μέσα στο πλαίσιο ερευνητικών σπουδών, όπως η TIMSS σε συνεργασία με την SMSO (Survey of Mathematics and Science Opportunities) (Έρευνα Μαθηματικών και Επιστημονικών Ευκαιριών) τονίζουν ένα δυνατό κουλτουριάρικο χαρακτήρα στα μαθήματα ακόμη και σε αυτά όπως τα μαθηματικά. Συγκεκριμένα, οι υπεύθυνοι τις έρευνας αναφέρουν: «Τα μαθηματικά και η επιστήμη μερικές φορές θεωρούνται σαν μαθήματα εντελώς αποκομμένα από τις επιρροές τις κουλτούρας. Κάποιος μπορεί να πει πως εφόσον το περιεχόμενο των μαθηματικών είναι παγκόσμιο, τότε θα πρέπει να υπάρχει και κάτι το παγκόσμιο σε ότι αφορά το τρόπο με τον οποίο το περιεχόμενο αυτό παρουσιάζεται στους μαθητές. Τα αποτελέσματά μας διαψεύδουν αυτή τη θεώρηση. Οι διάφορες χώρες έχουν αναπτύξει τους δικούς τους τρόπους για να εισάγουν τους μαθητές στην ουσία των μαθηματικών. Εκεί, φαίνεται να υπάρχουν ισχυρά πολιτιστικά στοιχεία, ακόμη και εθνικές ιδεολογίες στη διδασκαλία αυτών των μαθημάτων. Επιπροσθέτως, η Perin (1997) αποκαλύπτει στις αναλύσεις της μια γερή εξάρτηση στις πολιτιστικές παραδόσεις σε ό,τι αφορά τη διδακτική των μαθηματικών σε Αγγλία, Γερμανία και Γαλλία. Αναφέρει επίσης πως είναι ενδιαφέρον αλλά και συναρπαστικό να μελετά κανείς τις διαφορές και ομοιότητες στη διδακτική των μαθηματικών σε διαφορετικές χώρες. Πιο συγκεκριμένα, θέτει κάποια ερωτήματα τα οποία η έρευνα της διδακτικής των μαθηματικών καλείται να απαντήσει: «Πως μπορούμε να κατανοήσουμε τις μεθόδους διδασκαλίας των καθηγητών σύμφωνα με τα όσα γνωρίζουμε για τις διαφορετικές χώρες; Αν πιστέψουμε πραγματικά πως η πολιτιστική παράδοση εμφυτεύεται στο τρόπο διδασκαλίας, τότε κάτω από ποιες συνθήκες αυτό πραγματοποιείται και πως και σε τι βαθμό επηρεάζει τη διδασκαλία και την εκμάθηση των μαθηματικών; Τέλος, από πού πηγάζουν αυτές οι εκπαιδευτικές και πολιτιστικές παραδόσεις και πως διεισδύουν στην αίθουσα διδασκαλίας;<sup>1</sup> Αυτά είναι

---

<sup>1</sup> Gabriele Kaiser: “Educational philosophies and their influence on mathematics education- An ethnographic study in English and German mathematics classrooms ZDM 2002 Vol.34 (6) σελ 241

ορισμένα ερωτήματα τα οποία πρέπει να τεθούν και να απαντηθούν από τους ερευνητές της διδακτικής των μαθηματικών αν θέλουμε να επωφεληθούμε από τη σύγκριση του τρόπου διδασκαλίας και εκμάθησης των μαθηματικών με τις άλλες χώρες.

## **ΜΙΑ ΘΕΣΗ ΣΤΟ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ**

Όπως και η ίδια η μαθηματική παιδεία, η έρευνα για τη διδακτική των μαθηματικών ξεκίνησε πρωταρχικά μέσα στα πανεπιστήμια. Τα προτεσταντικά πανεπιστήμια της Πρωσίας στις αρχές του 19<sup>ου</sup> αιώνα, ξεκίνησαν πρώτα μια ανάπλαση της υψηλότερης εκπαίδευσης η οποία τελικά απλώθηκε και σε άλλες χώρες και που οδήγησε στη διαφοροποίηση των μοντέρνων επιστημονικών πειθαρχιών. Με αυτή την ανάπλαση έφτασε και η προσδοκία πως η κοινότητα του πανεπιστημίου όχι μόνο θα δίδασκε αλλά και θα διεύθυνε την έρευνα. Στην Ευρώπη, η διδακτική (σαν μάθημα πλέον) ξεκίνησε να διδάσκεται κανονικά αλλά θεωρείτο διαφορετικής κατηγορίας μάθημα. Η πρώτη έδρα στη διδακτική ιδρύθηκε το 1779 και έως το 1910, στη Γερμανία ο αριθμός των καθηγητών που ήταν υπεύθυνοι για το μάθημα της διδακτικής ήταν μόλις 13. Το ποσοστό αυτό, βέβαια, δε διέφερε πάρα ελάχιστα για τις άλλες χώρες.

Κατά τη διάρκεια του 19<sup>ου</sup> αιώνα, όλοι οι καθηγητές μαθηματικών που αποφοιτούσαν από τα πανεπιστήμια με σκοπό να διδάξουν στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση, δεν ήταν κατάλληλα προετοιμασμένοι εφόσον οι οδηγίες για το πως να διδάξουν τα μαθηματικά (δηλαδή η διδακτική των μαθηματικών) ήταν ελλιπείς εφόσον η διδακτική ήταν στη καλύτερη περίπτωση ένα διαφορετικό και μικρής σημασίας κομμάτι στην όλη προετοιμασία τους. Στη Γερμανία, για παράδειγμα, οργανώνονταν αρκετά συχνά, παιδαγωγικά σεμινάρια μέσα στα πανεπιστήμια με σκοπό να προετοιμάσουν τους φοιτητές των μαθηματικών για να διδάξουν στα σχολεία. Το αξιοθαύμαστο είναι πως αυτά τα σεμινάρια παρότρυναν τους σπουδαστές να κάνουν έρευνα πάνω στη διδακτική των μαθηματικών. Τελικά, στο τέλος του αιώνα με τη προσπάθεια να καταστήσουν τη διδακτική σαν μάθημα που έχει να κάνει με τη σχολική γνώση και όχι με τη γενική παιδαγωγική, οι φοιτητές των Γερμανικών πανεπιστημίων άρχισαν να λαμβάνουν πρακτική εξάσκηση στο τρόπο διδασκαλίας των μαθηματικών.

Σε άλλες χώρες, οι φοιτητές που θα δίδασκαν μαθηματικά, σπούδαζαν μαθηματικά με τη διαφορά, όμως, του ότι παράλληλα παρακολουθούσαν περιστασιακά και μια διάλεξη σχετικά με τη διαχείριση της αίθουσας διδασκαλίας και την ηθική διδακτική ως επαγγελματική προετοιμασία. Για παράδειγμα, στη Γαλλία το école normale supérieure που ιδρύθηκε από τον Ναπολέοντα το 1810 και συνεχίστηκε σχεδόν αμετάβλητο έως το τον δεύτερο παγκόσμιο πόλεμο είχε στο δικό του πρόγραμμα εκπαίδευσης των μελλοντικών δασκάλων των μαθηματικών, κυρίως διαλέξεις. (Η κυρία στρατηγική της Γαλλίας για να καλύψει την έλλειψη ικανών δασκάλων ήταν η παροχή βιβλίων-οδηγητών τα οποία αργότερα χρησιμοποιούνταν και σαν μηχανισμός ελέγχου του τρόπου διδακτικής).<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Handbook of research on mathematics teaching and learning, Jeremy Kilpatrick: “a history of research in mathematics education”, Macmillan Publishing Company 1992 σελ.4-5

Η διδακτική των μαθηματικών ως πεδίο μελέτης άρχισε να αναπτύσσεται αργά και σταδιακά από το τέλος του 19<sup>ου</sup> αιώνα αφού ολοένα και περισσότερα πανεπιστήμια σε αρκετές χώρες για ικανοποίηση των αυξημένων αναγκών για ολοένα και καλύτερα προετοιμασμένους καθηγητές, άρχισαν να επεκτείνουν τα προγράμματά τους για την διδακτική των καθηγητών. Έως το 1912, μια έρευνα από τη διεθνή επιτροπή της διδακτικής των μαθηματικών ανέφερε ότι οι πανεπιστημιακές διαλέξεις που σχετίζονται με τη διδακτική των μαθηματικών (σαν συμπλήρωμα στις διαλέξεις των υπολοίπων μαθηματικών μαθημάτων) λάμβαναν χώρα σε χώρες όπως οι ΗΠΑ, η μεγάλη Βρετανία, η Γερμανία και το Βέλγιο. Μάλιστα, σε μερικές χώρες (όπως η Γερμανία) είχαν ιδρυθεί μεγάλα ινστιτούτα μόνο γι' αυτό το σκοπό, να αναλάβουν, δηλαδή, την σωστή προετοιμασία (σε πρακτικό επίπεδο) των μελλοντικών καθηγητών των μαθηματικών. Από αυτά φαίνεται η μεγάλη αξία που έδιναν οι εν λόγω χώρες για την ορθή διαπαιδαγώγηση των νέων τους. Η έρευνα, όμως, (γιατί περί αυτής ο λόγος, δεν κατάφερε να ανθίσει σε τέτοιου είδους ινστιτούτα. Αλλού, όμως, (όπως στις ΗΠΑ και αργότερα στη Γερμανία, την Αγγλία και τη Κίνα) μερικά από τα «ειδικά σχολεία» για την εκπαίδευση των καθηγητών απορροφήθηκαν από τα πανεπιστήμια. Ένα παράδειγμα είναι το Κολέγιο της Νέας Υόρκης για την Εκπαίδευση των Καθηγητών (New York College for the Training of Teachers) το οποίο είχε ιδρυθεί το 1887, το 1890 απορροφήθηκε (ή καλύτερα «ενώθηκε») με το Columbia University της Αμερικής.

Κατά τη πάροδο των χρόνων και κάπως διαφορετικά σε κάθε χώρα, η διδακτική των μαθηματικών άρχισε σιγά σιγά να αναγνωρίζεται σαν πανεπιστημιακό μάθημα ίσης βαρύτητας με τα υπόλοιπα. Η μεγάλη προσδοκία όλων ήταν πως με την εισαγωγή της διδακτικής στα πανεπιστήμια, το επόμενο βήμα θα είναι η έρευνα εκ μέρους των καθηγητών και όχι απλώς η στυγνή διδασκαλία. Πράγματι, αυτό οδήγησε αρκετούς από αυτούς τους ανθρώπους να αναλάβουν την έρευνα στη διδακτική των μαθηματικών.<sup>1</sup>

## **Η ΕΡΕΥΝΑ ΤΗΣ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΟ ΓΥΝΑΙΚΕΙΟ ΦΥΛΛΟ**

Μια καινοτομία στο τομέα της εκπαίδευσης των μαθηματικών στα σχολεία ήταν το γεγονός πως πλέον (μετά το 1820) το μάθημα των μαθηματικών μπορούσαν να το παρακολουθήσουν μαζί με τ' αγόρια και τα κορίτσια. Αρχικά, το μάθημα των μαθηματικών το παρακολουθούσαν μόνο τ' αγόρια για το λόγο ότι τη στιγμή της εισαγωγής του στο σχολικό πρόγραμμα, τα παιδιά ήταν ήδη στην ηλικία των δώδεκα ετών, ηλικία κατά την οποία τα κορίτσια παρατούσαν το σχολείο για να ασχοληθούν με τις οικιακές δουλειές, όπως το επέβαλλε η κοινωνία. Στην αρχή, πίστευαν πως τα μαθηματικά συσχετίζονταν κατά αποκλειστικότητα με της εμπορικές δραστηριότητες και γενικότερα με ανδρικές ασχολίες.<sup>2</sup>

---

<sup>1</sup> Handbook of research on mathematics teaching and learning, Jeremy Kilpatrick: "a history of research in mathematics education", Macmillan Publishing Company 1992 σελ.4-5

<sup>2</sup> A history of school mathematics voll (national council of headers of mathematics-NCTM.) σελ.66-67.

Στη συνέχεια όμως, με την απλή αριθμητική αλλά και με την απλούστευση των μαθηματικών μέσω του διδακτικού προγράμματος του σχολείου, μετά το 1820 ολοένα και περισσότερες κοπέλες αντιμετώπιζαν τα μαθηματικά σαν κάτι το όχι περίεργο αλλά σαν ένα ακόμη διδακτικό μάθημα του σχολείου. Αυτό είχε σαν άμεση συνέπεια συζητήσεις και συμβούλια ανάμεσα στους δασκάλους των μαθηματικών για το πόσο αριθμητική είναι κατάλληλη και συνάμα επαρκείς για την αφομοίωσή της από τα κορίτσια. Τέθηκε λοιπόν ζήτημα έρευνας του τρόπου διδακτικής των μαθηματικών για το γυναικείο φύλο.

Κατά το δέκατο ένατο αιώνα ήταν που ενώ τ' αγόρια διδάσκονταν μαθηματικά μαζί με τα κορίτσια, τα τελευταία τύγγαναν ειδικής μεταχείρισης ως προς το τρόπο διδασχής του μαθήματος. Όμως, με τις συνεχώς εντονότερες πιέσεις που δέχονταν τα σχολεία από τα φεμινιστικά κινήματα που άνθιζαν εκείνη τη περίοδο, είχαμε σαν αποτέλεσμα να ανατραπούν όλα τα συντηρητικά στερεότυπα και η μαθηματική διδασχή να οριστεί «κατάλληλη» και για τις γυναίκες εφόσον υπήρχαν και γυναίκες καθηγήτριες που δίδασκαν το μάθημα.

Στη μεταεπαναστατική περίοδο και σταδιακά με τα χρόνια η διδακτική της μαθηματικής παιδείας από «κατάλληλη» έγινε απαραίτητη για το γυναικείο φύλο. Οι γυναίκες ήταν πλέον απαραίτητο να γνωρίζουν να διαχειρίζονται τα οικονομικά του σπιτιού, να μαθαίνουν να ζουν χωρίς την ανάγκη της ανδρικής οικονομικής υποστήριξης και πως να τα βγάλουν πέρα με την οικονομική κατάσταση σε περίπτωση που χηρέψουν.<sup>1</sup>

## **ΨΥΧΟΛΟΓΙΚΕΣ ΠΡΟΕΚΤΑΣΕΙΣ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ**

Μια μεγάλη επίδραση στη διαδικασία της έρευνας για τη διδακτική των μαθηματικών, είναι η ψυχολογία. Και με τον όρο «ψυχολογία» εννοούμε τον τρόπο με τον οποίο πρέπει να διδασχθούν τα μαθηματικά ώστε ένα παιδί να καταφέρει μέσα στην αίθουσα να κατανοήσει σε βάθος τα θεωρήματα τους τύπους, τις αποδείξεις και γενικώς οτιδήποτε σχετίζεται με τα μαθηματικά. Η ψυχολογία είναι αυτή η οποία βρίσκοντας μέσω της έρευνας τα «αδύναμα σημεία» και τις δυσκολίες του μαθητή θα προτείνει το καλύτερο τρόπο να τις αντιμετωπίσει.

Κοντά στις αρχές του 20<sup>ου</sup> αιώνα, ψυχολογικά ινστιτούτα στη Γερμανία και ψυχολογικά τμήματα στις Ηνωμένες Πολιτείες, άρχισαν να αναλαμβάνουν εμπειρικές σπουδές και έρευνες σχετικά με το ζήτημα της διδακτικής των μαθηματικών. Η ψυχολογία άρχισε να εξελίσσεται σε ιδιαίτερα σημαντική επιστήμη για το σχολείο σε βαθμό που κατείχε τη δική της θέση στο σχολικό πρόγραμμα σπουδών. Ως πανεπιστημιακό μάθημα το οποίο είχε τις ρίζες του στο πανεπιστήμιο, μέσα στο οποίο<sup>2</sup>

---

<sup>1</sup> A history of school mathematics voll (national council of headers of mathematics-NCTM.) σελ.66-67

<sup>2</sup> Handbook of research on mathematics teaching and learning, Jeremy Kilpatrick: “a history of research in mathematics education”, Macmillan Publishing Company 1992 σελ.4-5

εξελισσόταν η ψυχολογία παρείχε στους καθηγητές στα σχολεία αλλά και στα διάφορα τμήματα διδακτικής, ένα είδος επιστήμης η οποία ίσως έδινε στο σχολείο μεγαλύτερο κύρος και ένα σύνολο μεθόδων που θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν για τις ερευνητικές διαδικασίες σχετικά με τη διδακτική των μαθηματικών. Επιπλέον, οι δημογραφικές πιέσεις μέσα στην ίδια τη ψυχολογία, πίεζαν τους ερευνητές να κάνουν έρευνα για τη διδακτική. Από την αρχή της διδακτικής ψυχολογίας, τα μαθηματικά ήταν ένα αρκετά διαδεδομένο «όχημα» το οποίο χρησιμοποιούσαν για περαιτέρω έρευνα μάλλον λόγω του ότι τα μαθηματικά ενδείκνυται για έρευνα χάρη σε αντιλήψεις που αφορούν το τόσο σημαντικό ρόλο τους ως σχολικό μάθημα καθώς και τη σχετική τους ανεξαρτησία από εξωσχολικές επιρροές. Ακόμη, τα μαθηματικά ενδείκνυται για ερευνητικές διαδικασίες λόγω της μεγάλης ποικιλίας στο βαθμό πολυπλοκότητας και δυσκολίας που παρουσιάζουν. Την αξία των μαθηματικών γενικότερα αλλά και της διδακτικής ειδικότερα είχε πρώτος αντιληφθεί ο Πλάτωνας<sup>1</sup>. Ο Πλάτωνας ήταν από τους πρώτους που πήραν τόσο σοβαρά το θέμα της διδακτικής του αντικειμένου των μαθηματικών. Θεωρούσε πως «ουδείς εκ των κλάδων μαθημάτων δεν είχε τη μορφωτική δύναμη των μαθηματικών τα οποία απεργάζονται την αφύπνιση του πνεύματος και καθιστούν τούτο ικανό να αποκτήσει ευκινησία πνεύματος, συνέπεια και ζωηρότητα». Από τότε φαινόταν η ανάγκη διδασκαλίας σε όχι μόνο σε ερευνητικό επίπεδο αλλά και σε επίπεδο πρακτικό για την ίδια τη ζωή. Συγκεκριμένα, ο Πλάτωνας θεωρούσε πως ο ρόλος των μαθηματικών δεν έγκειται μόνο στο ουσιαστικό, δε περιορίζεται στην απόκτηση της αυτής μόνο τεχνικής των αριθμών αλλά θεωρεί πως έχουν μια βαθύτερη μορφωτική αξία. Γι' αυτούς τους λόγους ο Πλάτωνας έδωσε εξέχουσα θέση στα μαθηματικά στην Ακαδημία του<sup>2</sup>. Μερικοί διδάσκαλοι των μαθηματικών βλέπουν με δυσπιστία το όλο εγχείρημα της ερευνητικής διαδικασίας σε συνδυασμό με τις ψυχολογικές προεκτάσεις δεδομένου του ότι έχει υποπέσει στην αντίληψή τους ένα δείγμα αδιαφορίας σε ότι αφορά το ακαδημαϊκό μάθημα της διδακτικής των μαθηματικών, οι ίδιοι όμως δε διστάζουν να χρησιμοποιούν σημαντικά στοιχεία και από τη ψυχολογία αλλά και από τα αποτελέσματα των εκάστοτε ερευνών προς όφελός τους<sup>1</sup>.

## **Η ΕΡΕΥΝΑ ΣΕ Ο,ΤΙ ΑΦΟΡΑ ΤΗΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΚΑΙ ΤΟΥ ΤΡΟΠΟΥ ΔΙΔΑΧΗΣ ΤΗΣ**

Η κατανόηση ενός μαθηματικού θεωρήματος προϋποθέτει τη τεκμηρίωσή του με τη παράθεση μιας απόδειξης. Η ιστορία της μαθηματικής απόδειξης χρονολογείται από πολύ παλιά με χαρακτηριστική την ιστορία του διαλόγου μεταξύ του Σωκράτη και του Μένωνα, ενός αγράμματος δούλου, στον οποίο δίδαξε γεωμετρία με χαρακτηριστικό το παράδειγμα με τον διπλασιασμό του εμβαδού ενός τετραγώνου<sup>3</sup>. Εδώ βέβαια, έχει τις ρίζες της η Σωκρατική μέθοδος διδασκαλίας κατά την οποία οι μαθητές αναγκάζονται να

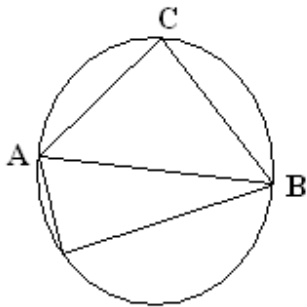
---

<sup>1</sup> Handbook of research on mathematics teaching and learning, Jeremy Kilpatrick: “a history of research in mathematics education”, Macmillan Publishing Company 1992 σελ.4-5

<sup>2</sup> Marron: “Η ιστορία της εκπαίδευσης κατά την αρχαιότητα”.

<sup>3</sup> Μπάμπης Τουμάσης: «Σύγχρονη διδακτική των μαθηματικών». Σελ 50-51.

αποδεχθούν ένα συμπέρασμα το συχνά είναι ξένο ως προς την αρχική τους διαίσθηση (ο δούλος υποστήριζε πως για να βρούμε το διπλάσιο ενός τετραγώνου αρκεί να διπλασιάσουμε τις πλευρές του. Αυτό είναι λάθος γιατί έτσι βρίσκουμε το τετραπλάσιο.) μέσα από μια αριστοτεχνική ακολουθία ερωτήσεων. Τελικά, ο Σωκράτης με τη μέθοδό του (την επονομαζόμενη «μαιευτική») απέδειξε στον δούλο πως για να κατασκευάσουμε το διπλάσιο ενός τετραγώνου αρκεί να φτιάξουμε ένα νέο τετράγωνο χρησιμοποιώντας σαν πλευρά την διάμεσο του πρώτου<sup>1</sup>. Στη Γερμανία, δίνεται μεγάλη έμφαση στην απόδειξη στα σχολεία, ειδικά στις τάξεις του γυμνασίου. Ειδικά στο μάθημα της γεωμετρίας, η αξία της απόδειξης είναι πολύ μεγάλη για τη κατανόηση των σχετικών θεωρημάτων. Επιπλέον, η έρευνα καλείται να εξηγήσει πως η «πρακτική» απόδειξη, με την έννοια πως η εφαρμογή του θεωρήματος ισχύει σε πολλές περιπτώσεις δεν είναι αρκετή για την απόδειξη της ισχύος πιο «γενικών» προτάσεων ή θεωρημάτων και συνεπώς, μια πιο «επίσημη» απόδειξη κρίνεται αναγκαία. Η έρευνα, καλείται ακόμη να ανακαλύψει βασικά τον σωστό τρόπο διδασχής των αποδείξεων και πως θα γίνονται πιο προσιτές και κατανοητές στους μαθητές. Αυτά τα χαρακτηριστικά φαίνονται πιο καθαρά στο ακόλουθο παράδειγμα, που αφορά έναν διάλογο μεταξύ καθηγητή και μαθητών σχετικά με την απόδειξη του θεωρήματος του Θαλή. Το μάθημα ξεκίνησε με τη κατασκευή του κύκλου του Θαλή με διαφορετικά τρίγωνα τα οποία ο κάθε μαθητής καλούνταν να σχεδιάσει ξεχωριστά. Μια κοπέλα σχεδιάζει στο πίνακα το παρακάτω



σχέδιο. Ο καθηγητής ρωτάει την ιδιαιτερότητα του σχεδίου. Κάποιοι μαθητές υποθέτουν πως τα σχηματιζόμενα τρίγωνα είναι όλα ορθογώνια ενώ άλλοι εκφράζουν τις αμφιβολίες τους για αυτό. Τότε ο καθηγητής ορίζει τον κύκλο του Θαλή και όπως γνωρίζουμε από το ομώνυμο θεώρημα: «Αν πάρουμε τη διάμεσο ενός κύκλου (AB) και στη συνέχεια ενώσουμε τα σημεία A και B με ένα σημείο πάνω στη περιφέρεια του κύκλου (έστω C) τότε το τρίγωνο ACB που σχηματίζεται έχει ορθή τη γωνία C.» Ο καθηγητής ρωτάει πως θα

διατύπωναν οι ίδιοι οι μαθητές το θεώρημα. Μια κοπέλα περιγράφει απλώς τη κατασκευή και αυτά που βλέπει στο σχήμα. Τότε ο καθηγητής ρωτάει πως θα ήλεγχαν την ορθότητα του θεωρήματος. Ένα παιδί είπε πως ήλεγξε την ορθότητα του θεωρήματος με τέσσερα παραδείγματα και ίσχυε και για τα τέσσερα. Ο καθηγητής τότε υποστήριξε πως η απλή δοκιμή δεν αποδεικνύει αυτομάτως και το θεώρημα και ρώτησε ποια πληροφορία χρειάζονται ακόμη ώστε να ισχύει πως κάθε γωνία είναι ορθή. Με τα πολλά, δύο μαθητές έδωσαν τελικά τη κεντρική ιδέα της απόδειξης: να χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι το ευθύγραμμο τμήμα AB περνά από το κέντρο του κύκλου. Εν συνεχεία, ο καθηγητής έκανε ολοκληρωμένη την απόδειξη στους μαθητές. Από αυτό το παράδειγμα φαίνεται η μεγάλη αξία της αλληλεπίδρασης μαθητή-καθηγητή στο τρόπο κατανόησης και αφομοίωσης του θεωρήματος και της απόδειξής του από τους μαθητές.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Μπάμπης Τουμάσης: «Σύγχρονη διδακτική των μαθηματικών».

<sup>2</sup> Gabriele Kaiser: “Educational philosophies and their influence on mathematics education- An ethnographic study in English and German mathematics classrooms ZDM 2002 Vol.34 (6) Σελ 250-251.

Αντιθέτως, σε άλλες χώρες όπως στην Αγγλία για παράδειγμα οι καθηγητές δε καθιστούν σαφή την έννοια της μαθηματικής απόδειξης. Εκεί, διδάσκεται περισσότερο η «πρακτική» μέθοδος της απόδειξης ενός θεωρήματος παρά η «τυπική». Δηλαδή, εκεί τα θεωρήματα συχνά αναπτύσσονται εμπειρικά με μερικά παραδείγματα και κατά συνέπεια, οι καθηγητές δεν δίνουν στους μαθητές να καταλάβουν πως οι εξηγήσεις οι βασιζόμενες σε απλά παραδείγματα δεν είναι το ίδιο επαρκείς με τις αποδείξεις των θεωρημάτων ή πως τέτοιου είδους συλλογισμοί δεν έχουν την ίδια ισχύ με την κανονική-τυπική απόδειξη. Αρκετά συχνά, οι καθηγητές χρησιμοποιούν τον όρο «απόδειξη» για να ορίσουν την εξήγηση μέσω παραδειγμάτων που δίνουν στους μαθητές. Συνεπώς, ούτε οι μαθητές αλλά και πολλές φορές ούτε και οι ίδιοι οι καθηγητές δε κατορθώνουν να διακρίνουν τη διαφορά μεταξύ της γνήσιας απόδειξης και του απλού ελέγχου ισχύος του θεωρήματος μέσω παραδειγμάτων. Αυτό οδηγεί στο γεγονός πως πολλοί μαθητές πραγματοποιούν την έρευνα εργαζόμενοι με και στηριζόμενοι σε απλές εφαρμογές των θεωρημάτων ισχυριζόμενοι την απόδειξη τους χωρίς να ψάχνουν για μια πιο γενική εξήγηση. Αυτή η έλλειψη αποδείξεων ή ορθών αποδεικτικών μεθόδων εκ μέρους των μαθητών οφείλεται στο γεγονός ότι οι ίδιοι οι καθηγητές δεν μπαίνουν στο κόπο να διατυπώσουν τις αποδείξεις των θεωρημάτων. Αυτό γίνεται ευκολότερα κατανοητό με το ακόλουθο παράδειγμα διδακτικής των αποδείξεων των θεωρημάτων σε ένα σχολείο της Αγγλίας.: Στην αρχή του μαθήματος, ο καθηγητής ζητά από τους μαθητές να ξεκινήσουν με την πρακτική απόδειξη του θεωρήματος που έμαθαν στο προηγούμενο μάθημα. (Μιλάμε κι εδώ για το θεώρημα του Θαλή που είδαμε στο προηγούμενο παράδειγμά με το Γερμανικό τρόπο διδασκαλίας). «Διαγράψτε τρία διαγράμματα (κύκλους) με τρίγωνα μέσα σε αυτά και μετρήστε τη γωνία των τριγώνων που βρίσκεται στην επιφάνεια του κύκλου. Χθες διατυπώσαμε το θεώρημα, σήμερα θα το αποδείξουμε.» Μετά από λίγα λεπτά, μερικοί μαθητές είχαν τελειώσει τρία σχέδια στα οποία τα τρίγωνα πράγματι είχαν τις εγγεγραμμένες γωνίες τους ίσες με  $90^\circ$ . Τότε γίνεται ο εξής διάλογος μεταξύ καθηγητή-μαθητών:

Καθηγητής: «Γιατί νομίζετε πως σας ζήτησα να κάνετε τρία σχέδια;»

Μαθητής: «Για να επιβεβαιώσουμε το θεώρημα τρεις φορές»

Καθηγητής: «Πιστεύετε πως είναι επαρκείς τρεις εφαρμογές για να αποδείξουν ένα θεώρημα;»

Μαθητές: «όχι, όχι»

Καθηγητής: «Όμως, με όλους εσάς τώρα έχουμε 60 επαληθεύσεις του θεωρήματος, από τρεις ο καθένας σας. Άρα είμαστε πλέον σίγουροι πως εφόσον η θεωρία μας ισχύει για 60 επαναλήψεις, θα ισχύει και σε κάθε περίπτωση. Και εκεί ο καθηγητής ολοκλήρωσε την απόδειξη.

Το παραπάνω παράδειγμα δίνεται ώστε να έρθει σε αντιπαράθεση με το αντίστοιχο περιστατικό στη τάξη της Γερμανίας απ' όπου βλέπουμε την ουσιαστικά διαφορετική αντιμετώπιση στο θέμα της απόδειξης. Όπως είναι φανερό, ο τρόπος της Γερμανίας είναι σαφώς καλύτερος προσεγγίζοντας περισσότερο τον Σωκρατικό τρόπο διδακτικής με ταυτόχρονη συμμετοχή των μαθητών.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Gabriele Kaiser: "Educational philosophies and their influence on mathematics education- An ethnographic study in English and German mathematics classrooms ZDM 2002 Vol.34 (6) Σελ.251

## ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Ένα βασικό συμπέρασμα που θα μπορούσε να βγάλει κανείς από την ανασκόπηση της ιστορικής εξέλιξης της διδακτικής των μαθηματικών, είναι ότι η διαμόρφωση του περιεχομένου, της μορφής και της διδακτικής μεθοδολογίας των σχολικών μαθηματικών σε κάθε εποχή, ήταν αντανάκλαση των ιδιαίτερων κοινωνικών, οικονομικών, πολιτικών, πολιτισμικών, παιδαγωγικών και επιστημονικών συνθηκών, που τη χαρακτήριζαν κάθε φορά. Οι αλλαγές και οι μεταρρυθμίσεις στα σχολικά μαθηματικά προέρχονταν κάθε φορά από δύο βασικές κατευθύνσεις. Από τις διεργασίες και εξελίξεις στη μαθηματική επιστήμη, αυτή καθ' εαυτή, και από τις κοινωνικές ανάγκες και απαιτήσεις για οικονομική και τεχνολογική ανάπτυξη. Αν θα πρέπει να μείνει κάτι από αυτή την ιστορική ανασκόπηση, αυτό, κατά τη γνώμη μου, πρέπει να είναι η αναγνώριση και συνειδητοποίηση των πολύπλοκων αλληλεπιδράσεων και αλληλο-συσχετίσεων στα βασικά συστατικά που προσδιορίζουν και συνθέτουν μια εκπαιδευτική πραγματικότητα, όσον αφορά στο μάθημα των μαθηματικών, και η κατανόηση του καθοριστικού αποφασιστικού ρόλου που αυτές ακριβώς θα μπορούσαν να παίξουν για την αποτελεσματικότητά της.

Ελπίζω, αυτή η ανασκόπηση να ενεργοποιήσει τη σκέψη του αναγνώστη και να τον ευαισθητοποιήσει στη διαπίστωση ότι πάντοτε θα υπάρχει ένα αδιάκοπο πρόβλημα των μαθηματικών προγραμμάτων καθώς και των διδακτικών μεθόδων στις μεταβαλλόμενες αντιλήψεις και φιλοσοφίες γύρω από τη φύση των μαθηματικών καθώς επίσης και στις ανάγκες της κοινωνίας. Οι αλλαγές στη μαθηματική εκπαίδευση, όπως εξάλλου και σ' οποιαδήποτε εκπαιδευτική πραγματικότητα, δεν έρχονται επειδή τις θέλουν ή τις οραματίστηκαν τρεις τέσσερις εμπνευσμένοι άνθρωποι. Οι πραγματικές αλλαγές ή θα είναι προϊόντα αδήριτης κοινωνικής ανάγκης, η οποία θα προέρχεται από κοινωνικό-οικονομικές και πολιτικές ανακατατάξεις ή απλώς δε θα υφίστανται.<sup>1</sup>

Τέλος, θα ήθελα να συνοψίσω λέγοντας πως η σωστή μέθοδος διδασκαλίας των μαθηματικών (αυτό στο οποίο αναφέρομαι ως διδακτική των μαθηματικών) είναι μεγίστης και ταυτόχρονα βιωτικής σημασίας για το μάθημα των μαθηματικών. Η έρευνα για τη διδακτική των μαθηματικών δε πρέπει ποτέ να πάψει να υφίσταται δεδομένου του ότι τα δεδομένα συνεχώς αλλάζουν, είτε αυτά είναι κοινωνικοπολιτικές αλλαγές είτε είναι μικροαλλαγές βασιζόμενες σε ψυχολογικές μεταβολές της κάθε γενιάς μαθητών στα σχολεία. Μια σωστή έρευνα μπορεί να βοηθήσει το τρόπο διδασκαλίας των μαθηματικών και κατά συνέπεια το βαθμό ανάλυσης, εμβάθυνσης και τελικά αφομοίωσης των ομολογουμένως περίπλοκων μαθηματικών εννοιών από τους μαθητές στα σχολεία.

---

<sup>1</sup> Μπάμπης Τουμάσης: «Σύγχρονη διδακτική των μαθηματικών». Σελ 51

## **ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ**

- 1: Handbook of research on mathematics teaching and learning, Jeremy Kilpatrick: “a history of research in mathematics education”, Macmillan Publishing Company 1992
- 2: Gabriele Kaiser: “Educational philosophies and their influence on mathematics education- An ethnographic study in English and German mathematics classrooms ZDM 2002 Vol.34 (6)
- 3: New trends in mathematics teaching UNESCO
- 4: A history of school mathematics vol1 (national council of headers of mathematics-NCTM.)
- 5: Marron: “Η ιστορία της εκπαίδευσης κατά την αρχαιότητα”.
- 6: Αθανάσιος Γαγάτσης: «Θέματα διδακτικής των μαθηματικών».
- 7: Μπάμπης Τουμάσης: «Σύγχρονη διδακτική των μαθηματικών».